



ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) در هر دایره، طول یک کمان، برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان است. ب) دو دایره به طول شعاع‌های ۳ و ۵ سانتی‌متر و طول خط‌المركزین ۲ سانتی‌متر، مماس برون هستند. ج) تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند. د) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.	۱
۲	در هر قسمت، پاسخ مناسب را بنویسید. الف) فاصله مرکز دایره‌ای از یک خط، کمتر از شعاع آن دایره است. این خط و دایره نقطه اشتراک دارند. (یک، دو) ب) در هر مثلث، نقطه هم‌رسمی نیم‌سازها، مرکز دایره مثلث است. (محیطی، محاطی) ج) شیب خط در تبدیل، همواره حفظ می‌شود. (انتقال، دوران) د) دورانی به مرکز O و زاویه، تبدیلی همانی است. (۱۸۰°، ۳۶۰°)	۱
۳	در شکل زیر O مرکز دایره است. ثابت کنید؛ اندازه زاویه محاطی $\hat{M}$، برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است.	۱/۲۵
۴	با توجه به شکل، مقدار x را محاسبه کنید.	۱
۵	از نقطه‌ی P خارج دایره، مماس PT و خط قاطعی نسبت به دایره رسم می‌کنیم. خط قاطع دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید: $PT^2 = PA \times PB$	۱/۲۵
۶	دو دایره متخارج داریم که طول مماس مشترک داخلی و خارجی آنها به ترتیب برابر ۱۰ و ۲۴ سانتی‌متر و طول خط‌المركزین آنها مساوی ۲۶ سانتی‌متر است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.	۱/۵
۷	مثلی به طول اضلاع a، b و c با شعاع دایره محاطی داخلی به اندازه r و سه ارتفاع به طول‌های h_a، h_b و h_c را در نظر بگیرید. نشان دهید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	۱
۸	در چهارضلعی محیطی زیر ثابت کنید؛ مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر با مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است.	۱



ردیف	سؤالات	بارم
۹	مطابق شکل، نقطه M را روی خط d چنان در نظر می‌گیریم که $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن شود. اندازه زاویه $\hat{M}_1$ را به دست آورید.	۰/۵
۱۰	مطابق شکل زیر، نقطه O روی پاره خط AB است. ثابت کنید؛ تحت دورانی به مرکز O و هر زاویه حاده a ، اندازه پاره خط AB با تصویر آن با هم برابرند.	۱
۱۱	در شکل زیر، می‌خواهیم بدون تغییر طول ضلع‌ها، مساحت شکل را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را به دست آورید. ($\hat{BCD} = ۱۵۰^\circ$ و $BC = ۵$ ، $CD = ۸$)	۱
۱۲	ثابت کنید، در هر تبدیل طولی، تبدیل یافته یک زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.	۱/۲۵
۱۳	محل برخورد قطرهای مستطیلی را O می‌نامیم. در تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{۲}{۳}$ ، مساحت بین آن مستطیل و تصویرش برابر ۱۰ است. مساحت مستطیل اولیه را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۴	در مثلث $\triangle ABC$ با شعاع دایره محیطی R می‌دانیم؛ $BC = ۱۰$ ، $\hat{B} = ۱۳۵^\circ$ و $R = ۱۰$. اندازه زاویه $\hat{A}$ و طول ضلع AC را حساب کنید.	۱/۵
۱۵	در مثلث $\triangle ABC$ با فرض $AC = b$ ، $AB = c$ و $BC = a$ ، ثابت کنید؛ اگر $\hat{A} > ۹۰^\circ$ و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$.	۰/۷۵
۱۶	مثلی به طول اضلاع ۶، ۱۰ و ۱۴ را در نظر بگیرید. الف) با استفاده از قضیه کسینوس‌ها، اندازه زاویه مقابل به بزرگ‌ترین ضلع مثلث را محاسبه کنید. ب) به کمک دستور هرون، طول ارتفاع وارد بر کوچک‌ترین ضلع مثلث را به دست آورید.	۱ ۱/۲۵
۱۷	در مثلث $\triangle ABC$ داریم؛ $AB = ۵$ ، $BC = ۱۲$ و $AC = ۱۵$ طول نیمساز زاویه داخلی $\hat{A}$ را محاسبه کنید.	۱/۵



$$S = \frac{1}{2} ah_a / \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \quad (۱) \quad -۷ \text{ (ص ۳۰)}$$

$$\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \quad (۲) \quad \text{به طور مشابه}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{1}{r}$$

$$AB + CD = (AM + BM) + (DP + CP) \quad -۸$$

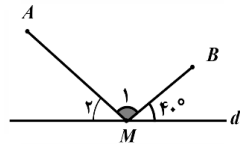
$$= (AQ + BN) + (DQ + CN)$$

$$= (AQ + DQ) + (BN + CN)$$

$$= AD + BC \quad (۲۷ \text{ ص})$$

$$-۹ \text{ (ص ۵۲)}$$

$$\hat{M}_r = 40^\circ \Rightarrow \hat{M}_l = 100^\circ$$



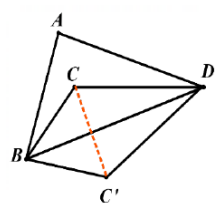
۱۰- اگر T یک دوران به مرکز O و زاویه

α باشد، با توجه به شکل تحت T داریم:

$$T(A) = A', T(B) = B'$$

$$\Rightarrow OA = OA', OB = OB'$$

$$\Rightarrow AB = OA + OB = OA' + OB' = A'B' \quad (۴۱ \text{ ص})$$



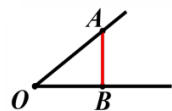
۱۱- ابتدا بازتاب نقطه C را تحت BD به دست

می آوریم و آن را C' می نامیم. بنابراین میزان

افزایش مساحت برابر است با:

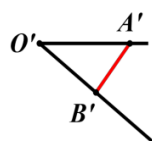
$$S_{BC'DC} = 2S_{BDC} = 2\left(\frac{1}{2} CB \times CD \sin C\right) = 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 20.$$

$$(۵۴ \text{ ص})$$



۱۲- فرض کنیم T یک تبدیل طولپا باشد. در

این صورت با توجه به شکل تحت T داریم:



$$T(O) = O', T(A) = A', T(B) = B'$$

۱- الف) نادرست (ص ۱۲) ب) نادرست (ص ۲۰)

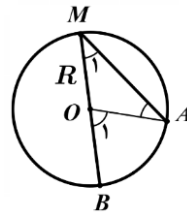
ج) درست (ص ۴۲) د) درست (ص ۳۶)

۲- الف) دو (ص ۱۱) ب) محاطی (ص ۲۵)

ج) انتقال (ص ۳۹) د) 360° (ص ۴۸)

۳- مرکز دایره را به نقطه‌ی A وصل می کنیم. (ص ۱۴)

$$OM = OA = R \Rightarrow \hat{M}_l = \hat{A} \quad (۱)$$



زاویه $\hat{O}_l$ در مثلث OAM خارجی است لذا:

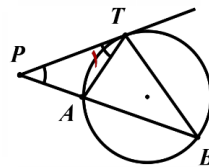
$$\hat{O}_l = \hat{M}_l + \hat{A} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \hat{O}_l = 2\hat{M}_l \Rightarrow BA = 2\hat{M}_l \Rightarrow \hat{M}_l = \frac{BA}{2}$$

۴- (ص ۱۶)

$$\frac{120^\circ + y}{2} = 80^\circ, \frac{120^\circ - y}{2} = x \Rightarrow y = 40^\circ, x = 40^\circ$$

۵- از نقطه‌ی T به A و B وصل می کنیم.



$$\begin{cases} P = P \\ T_l = B = \frac{TA}{2} \end{cases} \Rightarrow PAT \sim PBT \Rightarrow \frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT}$$

$$\Rightarrow PT^2 = PA \times PB \quad (۱۹ \text{ ص})$$

۶- فرض کنیم طول خط‌المركزین دو دایره برابر d و طول شعاع‌های آنها

R و R' باشد. $(R > R')$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\text{و طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

در نتیجه $24^2 = 26^2 - (R - R')^2$ و $10^2 = 26^2 - (R + R')^2$

$$\Rightarrow R + R' = 24, R - R' = 10 \Rightarrow R = 17, R' = 7$$

(ص ۲۳)



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{15}{12-x}$$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow BD = 3, DC = 9$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 5 \times 15 - 3 \times 9 = 48$$

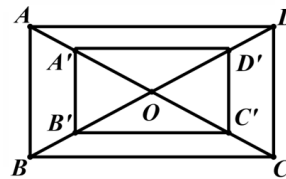
$$\Rightarrow AD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad (\text{ص } ۷۰)$$

در نتیجه پاره‌خط‌های OA و OB و AB به ترتیب به پاره‌خط‌های $O'A'$ و $O'B'$ و $A'B'$ تصویر می‌شود. چون تبدیل طولپاست داریم:

$$OA = OA', OB = OB', AB = A'B'$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle A'O'B' \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}'$$

(ص ۳۵)



۱۳- اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد داریم:

$$S - S' = 10 \Rightarrow S - \frac{4}{9}S = 10$$

$$\Rightarrow S = 18 \quad (\text{ص } ۴۹)$$

۱۴- (ص ۶۲)

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{AC}{\sin 135} = 2 \times 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 15^\circ \vee A = 30^\circ \\ AC = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \end{cases}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A > b^2 + c^2 \quad -15$$

$$\Leftrightarrow -2bc \cos A > 0 \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow A > 90^\circ \quad (\text{ص } ۷۴)$$

۱۶- الف) فرض کنیم $c = 14$ و $b = 10$ و $a = 6$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 14^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10) \cos C$$

$$\Rightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^\circ \quad (\text{ص } ۶۵)$$

$$P = \frac{6+10+14}{2} = 15 \quad (\text{ب})$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{15 \times 9 \times 5 \times 1} = 15\sqrt{3}$$

$$\text{و } S = \frac{1}{2} \times 6 \times h_a = 15\sqrt{3} \Rightarrow h_a = 5\sqrt{3} \quad (\text{ص } ۷۱)$$

۱۷- با فرض $BD = x$ داریم $DC = 12 - x$ در نتیجه

